16/10/2018

Θεμελιώδεις Έννοιες Μαθηματικών
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Να υπολογιστούν το συνημίτονο, το ημίτονο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη των παρακάτω τόξων: α) $-\frac{11\pi}{8}$ β) $-\frac{2021\pi}{12}$.

2) Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$6\sin^4 x + \sin^2 x - 2 = 0$$

στο διάστημα $[0, 3\pi]$.

3) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{6}\sin(2x) + \sqrt{2}\cos(2x) + 2 = 0$.

4) Αν $\tan(a) = -\sqrt{27}$, να λυθεί η εξίσωση $\sin(x+a) = -2\sin(x-a)$.

5) Να λύσετε την εξίσωση $\sin(5x) + \sqrt{2}\sin(10x) + \sin(15x) = 0$.

6) Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ABC είναι ορθή. Αν D είναι ένα σημείο της πλευράς AC ώστε $AC = 5AD$ να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{B}_1 = D\hat{B}C$ είναι ίση με

$$\tan(\hat{B}_1) = \frac{4\tan B}{5 + \tan^2 B}$$

(όπου B είναι η γωνία $A\hat{B}C$).

1

Εφόσον

α) $-\frac{11\pi}{8} + 2\pi = \frac{5\pi}{8}$ οι τριγ. αριθμοί είναι ίδιοι του $\frac{-11\pi}{8}$ ταυτίζονται με αυτούς τα $\frac{5\pi}{8}$.

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$(\cos(\theta)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$
$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ $\Rightarrow$ $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ $\Rightarrow$ $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}$

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ $\quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}$

$\tan\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$\cot\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

β) $-\frac{2021\pi}{12}$ || Οι τριγ. αριθμοί του $-\frac{2021\pi}{12}$ είναι ίδιοι με τους τριγ. αριθ. του $\frac{19\pi}{12}$.

$2040 = 85 \cdot 24$

$\frac{24\pi}{12} = 2\pi$.

$\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$
$= -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

γ) $6\sin^4 x + \sin^2 x - 2 = 0$, $[0, 3\pi]$

Θέτω $y = \sin^2 x$

$6y^2 + y - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4\cdot 6(-2) = 49$.

$y = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}$ ή $y = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$ ή $\sin^2 x = -\frac{2}{3}$.

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ ή $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

· $0 \le 2k\pi + \frac{\pi}{4} \le 3\pi \Leftrightarrow 0 \le 2k + \frac{1}{4} \le 3 \Leftrightarrow k=0$ ή $k=1$. / $\frac{\pi}{4}$ ή $2\pi + \frac{\pi}{4}$

· $0 \le 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \le 3\pi \Leftrightarrow 0 \le 2k + \frac{3}{4} \le 3 \Rightarrow k=0$ ή $k=1$ / $\frac{3\pi}{4}$ ή $2\pi + \frac{3\pi}{4}$.

· Όμοια για 3η κ' 4η λύση.

16/10/2013

Φυλλάδιο Τριγωνομετρίας | 1°

Άσκηση 3.

$\sqrt{6}\sin(2x)+\sqrt{2}\cos(2x)+2=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\sin(2x)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cos(2x)\right)+2=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)+2=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)+2=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{8}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=-2$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{4} \\ 2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

ΑΣΚΗΣΗ 4.

$\tan a=-\sqrt{27}$

Να λυθεί: $\sin(x+a)=-2\sin(x-a) \Leftrightarrow \sin x\cdot\cos a+\cos x\sin a=$
$=-2(\sin x\cos a-\cos x\sin a) \Leftrightarrow 3\sin x\cos a=\cos x\sin a \Leftrightarrow$
$3\tan x=\tan a \Leftrightarrow 3\tan x=-\sqrt{27} \Leftrightarrow 3\tan x=-3\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$

ΑΣΚΗΣΗ 5.

$\cancel{\sin(5x)}\ \sin(5x) + \sqrt{2}\sin(10x) + \sin(15x) = 0 \iff$

$\sin(5x) + \sin(5x) + \sqrt{2}\sin(10x) = 0 \iff$

$\iff 2\sin(10x)\cdot\cos(5x) + \sqrt{2}\sin(10x) = 0 \iff$

$\iff \sin 10x\,(2\cos 5x + \sqrt{2}) = 0 \iff$

$\sin 10x = 0$ ή $2\cos 5x + \sqrt{2} = 0 \iff$

$\sin 10x = \sin 0$ ή $\cos 5x = \cos\frac{3\pi}{4}$

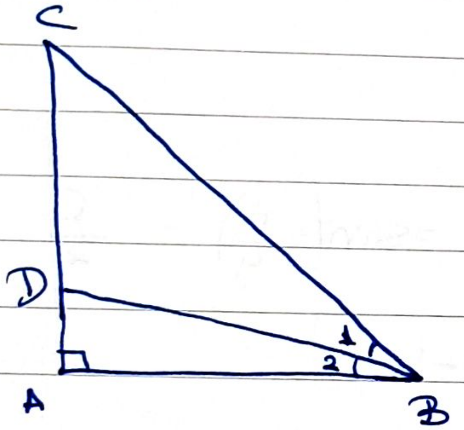
$10x = k\pi$ ή $5x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ή

$\vdots$

$5x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

$\vdots$

ΑΣΚΗΣΗ 6.



$AC = 5AD.$

$\tan B_2 = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{1}{5}AC}{AB} = \frac{1}{5}\tan B.$

$\tan B_1 = \tan(B - B_2) = \frac{\tan B - \tan B_2}{1 + \tan B \cdot \tan B_2} =$

$= \frac{\tan B - \frac{1}{5}\tan B}{1 + \tan B\,\frac{1}{5}\tan B} = \frac{\frac{4}{5}\tan B}{1 + \frac{1}{5}\tan^2 B} =$

$= \frac{4\tan B}{5 + \tan^2 B}.$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες.

$$p \vee (\sim p) \qquad\qquad \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q).$$

2) Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim \Big((p \wedge (\sim q))\Big) \qquad\qquad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

3) Αν γνωρίζουμε ότι η πρόταση $(p \Rightarrow q) \wedge [q \Rightarrow (\sim p)]$ είναι αληθής, τι συμπεραίνετε για τις προτάσεις p και q;

4) Να εξετάσετε αν η πρόταση $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$ είναι ταυτολογία.

5) Αν γνωρίζουμε ότι η πρόταση $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [\sim (q \Leftrightarrow p)]$ είναι ψευδής, να βρείτε ποιες από τις προτάσεις p, q, r είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.

6) Αν p, q, r είναι τρεις λογικές προτάσεις ώστε οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ να είναι αληθείς, να δειχθεί ότι η $\sim (p \vee q)$ είναι αληθής. Ισχύει το αντίστροφο;

7) Ο Αλέξανδρος η Άννα και ο Αντώνης, ρωτήθηκαν αν είναι φοιτητές. Η απάντησή τους ήταν η εξής:

" Αν η Άννα είναι φοιτήτρια, τότε δεν είναι φοιτητής ο Αντώνης "

και " δεν είναι σωστό ότι αν ο Αλέξανδρος είναι φοιτητής τότε δεν είναι φοιτήτρια η Άννα ".

Με δεδομένο ότι η απάντηση τους είναι αληθής, να βρείτε ποιοι είναι φοιτητές και ποιοι όχι.

8) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα αντιστοιχούν σε λογικές αποδείξεις.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \sim p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r) \\ p \vee q \\ \hline q \wedge r \end{array}$$

1) α)

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α

2)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$q \Rightarrow (\sim p)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (\sim p))$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Από την τελευταία στήλη βλέπουμε ότι η (π) είναι αληθής σε 2 περιπτώσεις
p ψευδής και q αληθής / p ψευδής και q ψευδής.
Συμπεραίνουμε ότι p ψευδής ενώ για την q δεν βγαίνει συμπέρασμα.

4) $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Άρα ταυτολογία.

5) Η $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [\sim (p \Leftrightarrow q)]$ είναι ψευδής

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	Π
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α

Άρα $p \Rightarrow$ Α
$q \Rightarrow$ Α
$r \Rightarrow$ Ψ.

$[p \Rightarrow \sim (r)] \wedge [\sim (p \Rightarrow (\sim q))]$

7) p: Ο Αλέξανδρος είναι φοιτητής
q: Η Άννα είναι φοιτήτρια
r: Ο Αντώνης είναι φοιτητής

p	q	r	$\sim r$	$p \Rightarrow (\sim r)$	$\sim q$	$p \Rightarrow (\sim q)$	$\sim p \Rightarrow (\sim q)$	$(p \Rightarrow (\sim r)) \wedge (\sim p \Rightarrow (\sim q))$	Π
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ

Άρα
p: Α
q: Α
r: Ψ.

Ο Αλ. είναι φοιτ.
Η Άννα είναι φοιτ.
Ο Αντ. δεν είναι φοιτητής

Φυτοαντία Λογικών Προτάσεων

Άσκηση 6.

Αν $p \Rightarrow (q \wedge r)$ και $q \rightarrow (p \wedge (\sim r))$ αληθείς νδο η $\sim (p \vee q)$ αληθής.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\sim r$	$p \wedge (\sim r)$	$q \rightarrow (p \wedge (\sim r))$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
A	A	A	A	A	Y	Y	Y	A	Y
A	A	Y	Y	Y	A	A	A	A	Y
A	Y	A	Y	Y	Y	Y	A	A	Y
A	Y	Y	Y	Y	A	A	A	A	Y
Y	A	A	A	A	Y	Y	Y	A	Y
Y	A	Y	Y	A	A	Y	Y	A	Y
Y	Y	A	Y	A	Y	Y	A	Y	A
Y	Y	Y	Y	A	A	Y	A	Y	A